

Apellido y Nombres:
 DNI: Padrón: Código Asignatura:
 Cursada. Cuatrimestre: Año: Profesor:
 Correo electrónico:

Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Tercera fecha. 20 de agosto de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Hallar todas las funciones enteras f tales que $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z) - \sin z| = 4$ y $\operatorname{Re}(f(0)) = \sqrt{7}$.

Ejercicio 2. Especificar el conjunto de valores reales positivos α , β y γ para los cuales $\int_0^{\infty} \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)} dx$ converge. Calcular esta integral en el caso $\alpha=1$, $\beta=1/2$ y $\gamma=3$.

Ejercicio 3. Sea $f(t) = \begin{cases} 3+2t & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -2+2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t}$ la serie exponencial de Fourier de la función f en el intervalo $[-1, 1]$. Analizar si la serie converge uniformemente en el intervalo $[-1, 1]$. Calcular $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

Ejercicio 4. Plantear un problema que modelice la temperatura T de régimen estacionario en una lámina plana y homogénea que ocupa la región del semiplano superior del plano xy si la temperatura sobre todo punto x del eje real es $\frac{1}{9x^2 + 1}$. Resolverlo.

Ejercicio 5. Resolver el siguiente sistema utilizando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x''(t) + y(t) = 2H(t) \\ -x'(t) + y'(t) = 3H(2t - 1) \end{cases} \quad \text{con } x(0^+) = x'(0^+) = 0, y(0^+) = 1$$

siendo $H(t)$ la función de Heaviside.

ANÁLISIS MATEMÁTICO III – PRIMER CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – TERCERA FECHA –20/08/2021
RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1) Hallar todas las funciones enteras f tales que $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z) - \operatorname{sen}(z)| = 4$ y además $\operatorname{Re}(f(0)) = \sqrt{7}$.

Resolución: Para cada función entera f , la función $h(z) = f(z) - \operatorname{sen}(z)$ también es entera (por serlo la función seno). Ahora, si h verifica $\lim_{z \rightarrow \infty} |h(z)| = 4$, entonces es acotada.¹ Por el Teorema de Liouville (uno de ellos...), h es constante. Por lo tanto, existe un complejo c tal que $f(z) - \operatorname{sen}(z) = c$. Ahora, la hipótesis $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z) - \operatorname{sen}(z)| = 4$ implica que $|c| = 4$, y la hipótesis $\operatorname{Re}(f(0)) = \sqrt{7}$ significa que $\operatorname{Re}(c) = \sqrt{7}$, por razones obvias: $\operatorname{Re}(f(0)) = \operatorname{Re}(f(0) - \operatorname{sen}(0))$. Por lo tanto, $c = \sqrt{7} + i3$ o bien $c = \sqrt{7} - i3$. Por lo tanto, las dos únicas funciones f que verifican las condiciones del enunciado son:

$$f(z) = \operatorname{sen}(z) + \sqrt{7} + i3 \quad \text{y} \quad f(z) = \operatorname{sen}(z) + \sqrt{7} - i3$$

¹Probemos esto una vez más: por definición, dado $\varepsilon = 18$, existe $R > 0$ tal que para todo $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$ se verifica $||h(z)| - 4| \leq 18$, es decir: $14 \leq |h(z)| \leq 22$. Por otra parte, la función $z \mapsto |h(z)|$ es continua en todo el plano y por lo tanto es acotada en el disco compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Sea M una cota superior de $|h(z)|$ en este disco. Se deduce inmediatamente que $\forall z \in \mathbb{C} : |h(z)| \leq 22 + M$.

2) Especificar el conjunto de valores reales positivos de α , β y γ para los cuales la integral $\int_0^{\infty} \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta (9+x^\gamma)} dx$ converge y calcular el valor de esta integral para el caso $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $\gamma = 3$

Resolución: Por ser $\beta > 0$, el integrando tiene una singularidad en $x = 0$ y por lo tanto tenemos que estudiar por separado las integrales impropias $\int_0^c \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta (9+x^\gamma)} dx$ y $\int_c^{\infty} \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta (9+x^\gamma)} dx$ para algún $c > 0$ (por ejemplo, $c = 1$). Comencemos por la segunda utilizando el criterio comparación asintótica (Apuntes sobre Integrales Impropias, página

8, criterio (4.2)), comparando el integrando $f(x) = \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)}$ (que es positivo en todo el intervalo de integración) con la función $g(x) = \frac{1}{x^{\beta+\gamma-\alpha}}$, también positiva y continua en el intervalo $[1, +\infty)$:

$${}_x \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = {}_x \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)} x^{\beta+\gamma-\alpha} = {}_x \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^\alpha \frac{x^\gamma}{9+x^\gamma} = 1$$

Por lo tanto, la integral $\int_1^\infty \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)} dx$ converge si y solamente si es convergente la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\beta+\gamma-\alpha}} dx$, es decir, si y solamente si $\beta + \gamma - \alpha > 1$.

Para estudiar la convergencia de la integral $\int_0^1 \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)} dx$ podemos recurrir al mismo criterio de comparación asintótica mediante el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$:

$$\int_0^1 \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)} dx = - \int_{+\infty}^1 \frac{(\frac{1}{t}+3)^\alpha}{\frac{1}{t^\beta}(9+\frac{1}{t^\gamma})} \frac{-dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{(\frac{1}{t}+3)^\alpha}{t^{2-\beta}(9+\frac{1}{t^\gamma})} dt$$

Comparando el integrando $h(t) = \frac{(\frac{1}{t}+3)^\alpha}{t^{2-\beta}(9+\frac{1}{t^\gamma})}$ (que es positivo en el intervalo de integración) con $k(t) = \frac{1}{t^{2-\beta}}$, observamos que

$${}_t \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \frac{h(t)}{k(t)} = {}_x \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \frac{(\frac{1}{t}+3)^\alpha}{t^{2-\beta}(9+\frac{1}{t^\gamma})} t^{2-\beta} = {}_x \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \frac{(\frac{1}{t}+3)^\alpha}{9+\frac{1}{t^\gamma}} \stackrel{\gamma>0}{=} \frac{3^\alpha}{9} \neq 0$$

Por lo tanto, la integral $\int_0^1 \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)} dx$ converge si y solamente si converge la integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^{2-\beta}} dt$, es decir: si y solamente si $2-\beta > 1$. Por lo tanto, la integral $\int_0^\infty \frac{(x+3)^\alpha}{x^\beta(9+x^\gamma)} dx$ converge (para valores positivos de los exponentes α , β y γ) si y solamente si se verifican simultáneamente las dos desigualdades

- (1) $\beta + \gamma - \alpha > 1$
- (2) $\beta < 1$

Tomando en cuenta que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\gamma > 0$, la condición necesaria y suficiente para la convergencia de la integral puede describirse de la siguiente manera:

- (i) $0 < \beta < 1$
- (ii) $\gamma > 1 - \beta$
- (iii) $0 < \alpha < \beta + \gamma - 1$

Se puede visualizar el dominio de variación de estos parámetros, graficándolo en el primer octante del espacio \mathfrak{R}^3 , eligiendo coordenadas β , γ y α (en ese orden, por la secuencia de desigualdades (i) (ii) y (iii))

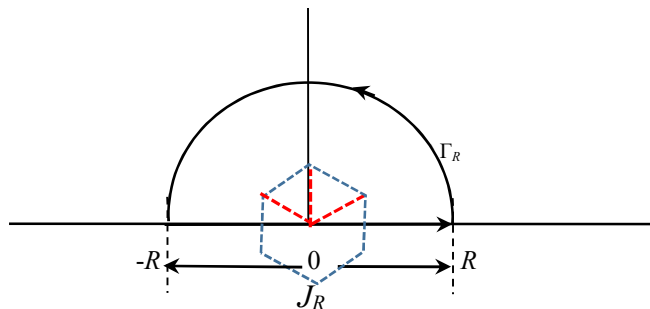
Cálculo de la integral para $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $\gamma = 3$. Se trata de la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x+3}{x^{\frac{1}{2}}(9+x^3)} dx$$

Mediante el cambio de variables $x = t^2$ (bastante natural, por cierto):

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x+3}{x^{\frac{1}{2}}(9+x^3)} dx = \int_0^{\infty} \frac{t^2+3}{t(9+t^6)} 2tdt = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^2+3}{9+t^6} dt \stackrel{\text{Integrando por } -\infty}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+3}{9+t^6} dt$$

Podemos utilizar, el teorema de los residuos aplicado a la función $f(z) = \frac{z^2+3}{z^6+9}$ y los circuitos simples positivos habituales y populares $J_R \cup \Gamma_R$ indicados en la figura, donde $J_R = \{x \in \mathfrak{R} : -R \leq x \leq R\}$ y $\Gamma_R = \{R.e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Las singularidades de f son las seis raíces sextas de -9 , tres de las cuales están en el semiplano superior: $z_1 = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = \sqrt[3]{3}i$ y $z_3 = \sqrt[3]{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ (las hemos indicado en rojo). Las otras tres son los conjugados $\bar{z}_1 = \sqrt[3]{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $\bar{z}_2 = -\sqrt[3]{3}i$ y $\bar{z}_3 = \sqrt[3]{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.



Por lo tanto, para todo $R > \sqrt[3]{3}$:

$$\int_{J_R} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i [RES(f, z_1) + RES(f, z_2) + RES(f, z_3)] \quad (2.1)$$

Cuando $R \longrightarrow +\infty$, la primera integral del primer miembro tiende a $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 3}{x^6 + 9} dx$ y

la segunda tiende a 0, lo que se puede verificar de la manera habitual:

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq Longitud(\Gamma_R) \cdot \text{Max}\{|f(z)| : z \in \Gamma_R\} = \pi R \cdot \text{Max}\left\{ \left| \frac{R^2 \cdot e^{i2\theta} + 3}{9 + R^6 \cdot e^{i6\theta}} \right| : 0 \leq \theta \leq \pi \right\} =$$

$$\leq \pi R \cdot \frac{R^2 + 3}{R^6 - 9} = \pi \frac{R^3 + 3R}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Por lo tanto,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 3}{x^6 + 9} dx = 2\pi i [RES(f, z_1) + RES(f, z_2) + RES(f, z_3)] \quad (2.2)$$

Calculemos los residuos. Tratándose de polos simples, el cálculo es bastante sencillito:

$$RES(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1)(z^2 + 3)}{z^6 + 9} = (z_1^2 + 3) \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{z^6 + 9} \stackrel{L'Hopital}{=} (z_1^2 + 3) \frac{1}{6z_1^5}$$

$$RES(f, z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(z - z_2)(z^2 + 3)}{z^6 + 9} = (z_2^2 + 3) \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{z - z_2}{z^6 + 9} \stackrel{L'Hopital}{=} (z_2^2 + 3) \frac{1}{6z_2^5}$$

$$RES(f, z_3) = \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{(z - z_3)(z^2 + 3)}{z^6 + 9} = (z_3^2 + 3) \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{z - z_3}{z^6 + 9} \stackrel{L'Hopital}{=} (z_3^2 + 3) \frac{1}{6z_3^5}$$

Para ahorrar un poco de cuentas: sabemos que $-9 = z_1^6 = z_1 z_1^5$, por lo tanto $\frac{1}{z_1^5} = -\frac{z_1}{9}$, y

lo mismo con las otras raíces. Por lo tanto:

$$RES(f, z_1) = -\frac{z_1(z_1^2 + 3)}{54}, \quad RES(f, z_2) = -\frac{z_2(z_2^2 + 3)}{54}, \quad RES(f, z_3) = -\frac{z_3(z_3^2 + 3)}{54}$$

Ahora, sumemos:

$$RES(f, z_1) + RES(f, z_2) + RES(f, z_3) = -\frac{1}{54} [z_1(z_1^2 + 3) + z_2(z_2^2 + 3) + z_3(z_3^2 + 3)] =$$

$$= -\frac{1}{54} [z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3(z_1 + z_2 + z_3)] = -\frac{1}{54} [3e^{i\frac{\pi}{2}} + 3i^3 + 3e^{i\frac{5\pi}{2}} + 3^{1+\frac{1}{3}}(e^{i\frac{\pi}{6}} + i + e^{i\frac{5\pi}{6}})] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{54}[i - i + i + 3^{\frac{1}{3}}(e^{\frac{i\pi}{6}} + i + e^{i\pi - \frac{i\pi}{6}})] = -\frac{1}{16}[i + 3^{\frac{1}{3}}(e^{\frac{i\pi}{6}} + i - e^{-\frac{i\pi}{6}})] = \\
&= -\frac{1}{6}[i + \sqrt[3]{3}(i + 2i\text{sen}(\frac{\pi}{6}))] = -\frac{i}{6}[1 + \sqrt[3]{3}(1 + 2\overbrace{\text{sen}(\frac{\pi}{6})}^{\frac{1}{2}})] = -\frac{i}{6}[1 + 2\sqrt[3]{3}]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 3}{x^6 + 9} dx = 2\pi i [RES(f, z_1) + RES(f, z_2) + RES(f, z_3)] = \frac{1}{3}[1 + 2\sqrt[3]{3}]\pi$$

3) Sea $f(t) = \begin{cases} 3 + 2t & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -2 + 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ y sea $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi t}$ la serie exponencial de Fourier de f en $[-1, 1]$. Analizar si la serie converge uniformemente en el intervalo $[-1, 1]$ y calcular $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ y $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$.

Resolución: f no es continua en $[-1, 1]$ y por lo tanto no puede ser límite uniforme, en este intervalo, de las funciones continuas $f_m(t) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{in\pi t}$ (Teorema de Weierstrass). Por otra parte, la extensión 2-periódica \tilde{f} de f es seccionalmente continua y con derivadas laterales finitas en todo punto. Por lo tanto satisface las condiciones de Dirichlet para la convergencia puntual de su serie de Fourier: para todo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi t} = \frac{1}{2}[\tilde{f}(t^+) + \tilde{f}(t^-)]$$

En particular, para $t = 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = \frac{1}{2}[\tilde{f}(0^+) + \tilde{f}(0^-)] = \frac{1}{2}[-2 + 3] = \frac{1}{2}$$

Para el cálculo de la segunda serie (de su suma), podemos aplicar el Teorema de Parseval:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 &= \frac{1}{P} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 (3 + 2x)^2 dx + \int_0^1 (-2 + 2x)^2 dx \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{(3 + 2x)^3}{6} \right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{(-2 + 2x)^3}{6} \right]_{x=0}^{x=1} \right) = \frac{1}{12} [3^3 - (3 - 2)^3 + 0 - (-2)^3] = \frac{17}{6}
\end{aligned}$$

4) Plantear un problema que modelice la temperatura T de régimen estacionario en una lámina plana y homogénea que ocupa la región del semiplano superior del plano xy si la temperatura en todo punto x del eje real es $\frac{1}{9x^2 + 1}$. Resolverlo.

Resolución: La distribución de temperaturas, $T = u(x,y)$ es solución del problema

$$\begin{cases} (i) \Delta u(x, y) = 0 & -\infty < x < +\infty, y > 0 \\ (ii) u(x, 0) = \frac{1}{9x^2 + 1} & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (3.1)$$

Por lo tanto, u es la parte real de una función $f: \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{C}$, holomorfa en el semiplano $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ y continua en $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$, que además verifica, para todo x real: $\text{Re}(f)(x) = \frac{1}{9x^2 + 1}$.

Con un poco de suerte y astucia, se puede encontrar una. Por ejemplo, la función

$$f(z) = \frac{1}{1 - 3iz}$$

es una de ellas. Esta función tiene una única singularidad en $z = \frac{1}{3i} = -\frac{i}{3}$, que no pertenece a $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}$, y para todo $z = x + iy \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{i}{3}\right\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1 - 3iz} = \frac{1 + 3i\bar{z}}{|1 - 3iz|^2} = \frac{1 + 3i(x - iy)}{|1 - 3i(x + iy)|^2} = \frac{1 + 3y + 3ix}{|1 + 3y - 3ix|^2} = \\ &= \frac{1 + 3y + 3ix}{9x^2 + (1 + 3y)^2} = \frac{\overbrace{1 + 3y}^{u(x,y)}}{9x^2 + (1 + 3y)^2} + i \frac{3x}{9x^2 + (1 + 3y)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u(x, y) = \frac{1 + 3y}{9x^2 + (1 + 3y)^2}$ es armónica en $\mathbb{R}^2 - \{(0, -\frac{1}{3})\}$ (en particular, es de clase C^∞ en el semiplano superior) por ser la parte real de una función holomorfa en $\mathbb{C} - \left\{-\frac{i}{3}\right\}$, y además verifica $u(x, 0) = \frac{1}{9x^2 + 1}$. Es decir, esta u es una solución del problema (3.1). Obviamente, no es la única, pues por ejemplo $u(x, y) + y$, $u(x, y) + xy$ y $u(x, y) + e^x \text{sen}(y)$ también son soluciones del mismo problema. Pero puede demostrarse que u es la única solución de (3.1) que, además, verifica

$$(iii) \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0 \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.2)$$

Se trata de una condición asociada al problema físico planteado que puede reemplazarse por otra menos restrictiva pero más natural: que la función u sea acotada en el semiplano superior, es decir, que exista una constante K tal que para todo $x \in \mathfrak{R}$ y todo $y \in [0, +\infty)$ se verifique $|u(x, y)| \leq K$. Pero la condición (3.2) está implícita en el uso de la transformación de Fourier para resolver el problema, como pasamos a describir sintéticamente: buscamos una solución u del problema (3.1) de clase C^∞ tal que u y sus derivadas parciales tiendan a 0 uniformemente cuando $(x, y) \rightarrow (\pm\infty, +\infty)$. Para esta función maravillosa tenemos (sintéticamente):

$$(a) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega, y) e^{i\omega x} d\omega, \quad \text{donde} \quad \hat{u}(\omega, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-i\omega x} dx$$

$$(b) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x, y) = 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathfrak{R} \times (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \hat{u}(\omega, y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial^2 y}(\omega, y) = 0 \quad \text{para todo } (\omega, y) \in \mathfrak{R} \times (0, +\infty)$$

si y solamente si existen dos funciones $\alpha, \beta : \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{C}$ tales que

$$\hat{u}(\omega, y) = \alpha(\omega) e^{\omega y} + \beta(\omega) e^{-\omega y} \quad \text{para todo } (\omega, y) \in \mathfrak{R} \times (0, +\infty)$$

La transformada de Fourier de toda función bonita tiende a cero cuando $\omega \rightarrow +\infty$ y cuando $\omega \rightarrow -\infty$. Puesto que y no toma valores negativos (por suerte no cambia de signo...), esto exige que $\hat{u}(\omega, y)$ sea de la forma

$$\hat{u}(\omega, y) = \gamma(\omega) e^{-|\omega|y} \quad \text{para todo } (\omega, y) \in \mathfrak{R} \times (0, +\infty)$$

para alguna función $\gamma : \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{C}$ (hemos abreviado las deducciones; de todos modos, si encontramos alguna solución acotada, sabemos que es la única)

$$(c) \quad \text{Para } y = 0, \text{ tenemos } \gamma(\omega) = \hat{u}(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{9x^2 + 1} dx. \quad \text{Mediante el}$$

cambio de variable de integración $x = \frac{1}{3}t$, resulta $\gamma(\omega) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\frac{\omega}{3}t}}{t^2 + 1} dt$. El cálculo de esta

integral (para cualquier $\omega \in \mathfrak{R}$) puede verse en la página 10 de los Apuntes sobre la Transformación de Fourier, ejemplo 3:

$$\gamma(\omega) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\frac{\omega}{3}t}}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{3} e^{-\frac{|\omega|}{3}}$$

Por lo tanto,

$$\hat{u}(\omega, y) = \gamma(\omega) e^{-|\omega|y} = \frac{\pi}{3} e^{-(y+\frac{1}{3})|\omega|}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega, y) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+\frac{1}{3})|\omega|+i\omega x} d\omega = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^0 e^{(y+\frac{1}{3})\omega+i\omega x} d\omega + \\ &+ \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} e^{-(y+\frac{1}{3})\omega+i\omega x} d\omega = \frac{1}{6} \left[\frac{e^{(y+\frac{1}{3})\omega+i\omega x}}{(y+\frac{1}{3})+ix} \right]_{\omega=-\infty}^{\omega=0} + \frac{1}{6} \left[\frac{e^{-(y+\frac{1}{3})\omega+i\omega x}}{-(y+\frac{1}{3})+ix} \right]_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{y+\frac{1}{3}+ix} - 0 \right] + \frac{1}{6} \left[0 - \frac{1}{-(y+\frac{1}{3})+ix} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{y+\frac{1}{3}+ix} - \frac{1}{-(y+\frac{1}{3})+ix} \right] = \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{-(y+\frac{1}{3})+ix - (y+\frac{1}{3})-ix}{-(y+\frac{1}{3})^2 - x^2} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{2(y+\frac{1}{3})}{(y+\frac{1}{3})^2 + x^2} \right] = \frac{1}{9} \frac{3y+1}{(y+\frac{1}{3})^2 + x^2} = \\ &= \frac{3y+1}{(3y+1)^2 + 9x^2}, \text{ que es exactamente la solución encontrada previamente.} \end{aligned}$$

5) Resolver el siguiente sistema utilizando la transformación de Laplace:

$$\begin{cases} x''(t) + y(t) = 2H(t) \\ -x'(t) + y'(t) = 3H(2t-1) \end{cases}$$

con las condiciones $x(0^+) = x'(0^+) = 0$, $y(0^+) = 1$, siendo H la función de Heaviside.

Resolución: Transformando el sistema y utilizando mayúsculas para las transformadas de Laplace de las funciones involucradas, tenemos

$$\begin{cases} s^2 X(s) + Y(s) = \frac{2}{s} \\ -sX(s) + sY(s) - 1 = \frac{3}{s} e^{-\frac{s}{2}} \end{cases}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

Despejando, tenemos

$$X(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} \frac{2}{s} & 1 \\ 1 + \frac{3}{s}e^{-\frac{s}{2}} & s \end{bmatrix}}{s^3 + s} = \frac{2 - 1 - \frac{3}{s}e^{-\frac{s}{2}}}{s^3 + s} = \frac{1}{s^3 + s} - \frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s(s^3 + s)}$$

$$Y(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} s^2 & \frac{2}{s} \\ -s & 1 + \frac{3}{s}e^{-\frac{s}{2}} \end{bmatrix}}{s^3 + s} = \frac{s^2(1 + \frac{3}{s}e^{-\frac{s}{2}}) + 2}{s^3 + s} = \frac{s^2}{s^3 + s} + \frac{3se^{-\frac{s}{2}}}{s^3 + s} + \frac{2}{s^3 + s}$$

$$= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^3 + s}$$

Factorizamos (a) $\frac{1}{s^3 + s} = \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}$

(b) $\frac{1}{s(s^3 + s)} = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1}$

y resulta:

$$X(s) = \frac{1}{s^3 + s} - \frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s(s^3 + s)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} - 3\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{s^2} + 3\frac{e^{-\frac{s}{2}}}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s^2 + 1} + \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2 + 1} = -\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{3e^{-\frac{s}{2}}}{s^2 + 1} + \frac{2}{s}$$

Entonces, utilizando las propiedades de la transformación de Laplace (por ejemplo la Tabla 1 - página 18 -, y la Tabla 2 - página 21 -, del Apunte sobre la Transformación de Laplace) obtenemos directamente:

$$x(t) = H(t) - \cos(t)H(t) - 3(t - \frac{1}{2})H(t - \frac{1}{2}) + 3\text{sen}(t - \frac{1}{2})H(t - \frac{1}{2})$$

$$y(t) = -\cos(t)H(t) + 3\text{sen}(t - \frac{1}{2})H(t - \frac{1}{2}) + 2H(t)$$
